

Cours d'Electronique De Puissance

IUT GEII – 2^{ème} année – Option EEP

Chapitre 9 - Modélisation des alimentations à découpage ...223

9.1	Introduction	223
9.1.1	Plan de l'étude.....	223
9.1.2	Conventions et notations	223
9.2	Cas du hacheur de type BUCK	224
9.2.1	Définition.....	224
9.2.2	Fonctionnement.....	224
9.2.3	Modélisation linéaire.....	225
9.2.3.1	<i>Fonctions de transfert du hacheur BUCK en conduction continue</i>	<i>225</i>
9.2.3.2	<i>Fonctions de transfert du hacheur BUCK en conduction discontinue.....</i>	<i>225</i>
9.2.4	Simulations MATLAB du hacheur BUCK.....	226
9.2.5	Simulations PSIM du hacheur BUCK.....	228
9.3	Cas du hacheur de type BOOST	229
9.3.1	Définition.....	229
9.3.2	Fonctionnement.....	229
9.3.3	Modélisation linéaire.....	230
9.3.3.1	<i>Fonctions de transfert du hacheur BOOST en conduction continue</i>	<i>230</i>
9.3.3.2	<i>Fonctions de transfert du hacheur BOOST en conduction discontinue.....</i>	<i>230</i>
9.3.3.3	<i>Fonctions de transfert du BOOST en tenant compte de la résistance de l'inductance.....</i>	<i>231</i>
9.3.4	Essais expérimentaux en boucle ouverte	233
9.3.5	Simulations PSIM	234
9.3.5.1	<i>Simulation 1 : on tient compte des semi-conducteurs.....</i>	<i>234</i>
9.3.5.2	<i>Simulation 1 : identification du système du second ordre équivalent.....</i>	<i>234</i>
9.3.5.3	<i>Simulation 2 : les semi-conducteurs sont parfaits.....</i>	<i>235</i>
9.3.5.4	<i>Simulation 2 : identification du système du second ordre équivalent.....</i>	<i>235</i>
9.3.6	Simulations MATLAB–SIMULINK.....	236
9.4	Cas du hacheur de type BUCK-BOOST	238
9.4.1	Définition.....	238
9.4.2	Fonctionnement.....	238
9.4.3	Modélisation linéaire.....	239
9.4.3.1	<i>Fonctions de transfert du hacheur BUCK-BOOST en conduction continue.....</i>	<i>239</i>
9.4.3.2	<i>Fonctions de transfert du hacheur BUCK-BOOST en conduction discontinue</i>	<i>239</i>
9.4.3.3	<i>Fonctions de transfert du hacheur BUCK-BOOST en régime auto-oscillant</i>	<i>239</i>
9.4.4	Simulations MATLAB	240
9.4.5	Simulations PSIM	240
9.5	Cas de l'alimentation FLYBACK	241
9.5.1	Schéma du montage	241
9.5.2	Relations de base.....	241
9.5.3	Linéarisation	241
9.5.4	Modélisation linéaire.....	242
9.5.4.1	<i>Fonctions de transfert de l'alimentation FLYBACK en conduction continue.....</i>	<i>242</i>
9.5.4.2	<i>Fonctions de transfert de l'alimentation FLYBACK en conduction discontinue.....</i>	<i>242</i>
9.5.4.3	<i>Fonctions de transfert de l'alimentation FLYBACK en régime auto-oscillant</i>	<i>242</i>
9.5.5	Simulations MATLAB	243
9.5.6	Simulations PSIM	243
9.6	Références bibliographiques.....	244
9.7	Annexe 1 : résolution d'équations différentielles linéaires.....	245

9.7.1	Equations différentielles linéaires	245
9.7.2	Intégration par la méthode des trapèzes	245
9.8	Annexe 2 : modélisation de l'alimentation FLYBACK en mode auto-oscillant	246
9.8.1	Fonctionnement en mode auto-oscillant	246
9.8.2	Modélisation en mode auto-oscillant	247

Liste des figures :

Fig. 9.1.	La fonction hacheur BUCK (dessins\h_serie1.drw).....	224
Fig. 9.2.	Formes d'ondes du hacheur de type BUCK (dessins\h_serie1.drw).	224
Fig. 9.3.	Réponse du filtre du hacheur de type BUCK avec 6V et 6A (orcad\iut3\UC3842B\matlab\filtre1.m).....	227
Fig. 9.4.	Démarrage du filtre du hacheur de type BUCK (orcad\iut3\UC3842B\matlab\filtre1.m).....	227
Fig. 9.5.	Comparaison de la fonction de transfert et de la simulation (filtre du hacheur de type BUCK) (orcad\iut3\UC3842B\matlab\filtre1.m).....	227
Fig. 9.6.	Schéma du hacheur de type BUCK sous SimCAD PSIM demo version 5.0 (orcad\iut3\UC3842B\PSIM\buck-1.sch).....	228
Fig. 9.7.	Réponse du filtre du hacheur de type BUCK avec 6V et 6A (orcad\iut3\UC3842B\PSIM\buck-1.sch).....	228
Fig. 9.8.	Démarrage du filtre du hacheur de type BUCK (orcad\iut3\UC3842B\PSIM\buck- 1.sch).....	228
Fig. 9.9.	La fonction hacheur BOOST (dessins\boost7.drw).	229
Fig. 9.10.	Formes d'ondes du hacheur de type BOOST (dessins\boost7.drw).	229
Fig. 9.11.	La fonction hacheur inverseur (dessins\buckboo1.drw).....	238
Fig. 9.12.	Formes d'ondes du hacheur BUCK-BOOST (dessins\buckboo1.drw).....	238
Fig. 9.13.	Alimentation à découpage asymétrique de type FLYBACK (dessins\flyback3.drw).241	
Fig. 9.14.	Exemple de circuit : le hacheur BUCK (dessins\h_serie1.drw).....	245
Fig. 9.15.	Fonctionnement en mode auto-oscillant (images\fly_osc0&1 .jpg).....	246

Liste des tableaux :

Tableau 9.1.	Valeurs des tensions harmoniques en % de la tension nominale $U_n = U_1$. Erreur ! Signet non défini	
Tableau 9.2.	Valeurs des tensions harmoniques en % de la tension nominale $U_n = U_1$	240
Tableau 9.3.	Valeurs des tensions harmoniques en % de la tension nominale $U_n = U_1$	243

Chapitre 9 - Modélisation des alimentations à découpage

9.1 Introduction

9.1.1 Plan de l'étude

Dans ce chapitre seront résumées les fonctions de transfert des convertisseurs suivant :

- 1) le hacheur série de type BUCK ;
- 2) le hacheur parallèle de type BOOST ;
- 3) l'alimentation à découpage de type FLYBACK.

Ces fonctions de transfert expriment la relation entre la tension de sortie v_s et les différentes grandeurs suivantes :

- le rapport cyclique α ;
- le courant crête dans l'inductance du circuit imposé par une consigne i_{cr} ;
- la tension d'entrée v_e .

Conformément aux techniques décrites dans le chapitre VI du livre de J.-P. FERRIEUX et F. FOREST [LIVRE122], il s'agira de fonctions de transfert valable en régime dynamique et petits signaux. Les modes de conduction continue et discontinue seront envisagés.

9.1.2 Conventions et notations

Toutes les variables sont notées sous la forme $x(t) = \tilde{x}(t) + X$, simplifiée sous la forme $x = \tilde{x} + X$, où X est la valeur du régime permanent (composants DC) et $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ est une petite variation autour du point de fonctionnement (composante AC du signal).

p est la variable de Laplace.

9.2 Cas du hacheur de type BUCK

9.2.1 Définition

Hacheur abaisseur, hacheur dévolteur, hacheur série, hacheur de type BUCK, buck chopper.

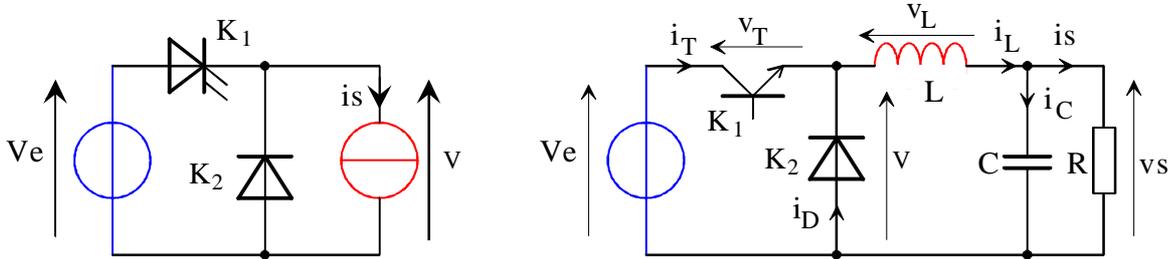


Fig. 9.1. La fonction hacheur BUCK (dessins\h_serie1.drw).

Le hacheur série est un convertisseur direct DC–DC. La source d'entrée est de type tension continue et la charge de sortie continue de type source de courant. L'interrupteur K1 peut être remplacé par une transistor puisque le courant est toujours positif et que les commutations doivent être commandées (au blocage et à l'amorçage).

9.2.2 Fonctionnement

L'interrupteur K1 est fermé pendant la fraction αT de la période de découpage T. La source d'entrée fournit l'énergie à la charge R au travers de l'inductance L.

Lors du blocage du transistor, la diode K2 assure la continuité du courant dans l'inductance. L'énergie emmagasinée dans cette inductance est alors déchargée dans le condensateur et la résistance de charge.

Les formes d'ondes en conduction continue sont représentée à la figure 9.2. En régime permanent, la valeur moyenne de la tension aux bornes de l'inductance est nulle. La tension de sortie est donnée par la relation suivante

$$V_s = \langle v_s \rangle = \langle v - v_L \rangle = \langle v \rangle = \alpha \times V_e \tag{9.1}$$

Par définition, $0 \leq \alpha \leq 1$, ce qui induit que le montage est abaisseur de tension (dévolteur).

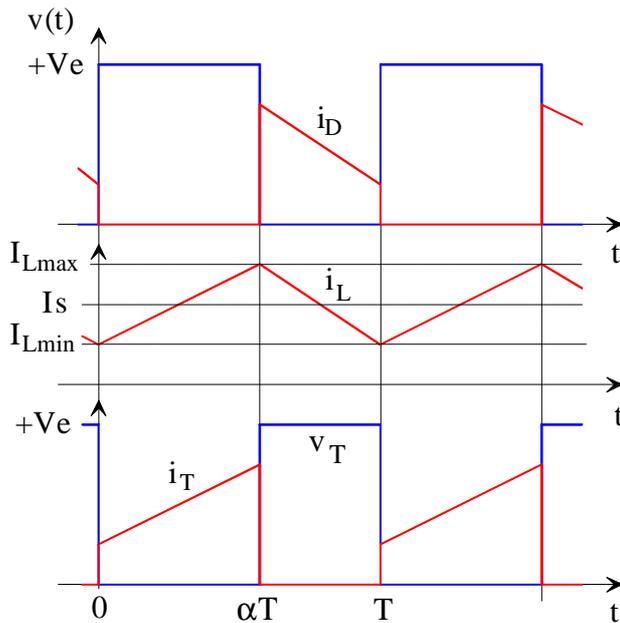


Fig. 9.2. Formes d'ondes du hacheur de type BUCK (dessins\h_serie1.drw).

9.2.3 Modélisation linéaire

[LIVRE122] J.-P. FERRIEUX, F. FOREST, 3e édition, 1999, Annexe B, §1, page 306.

9.2.3.1 Fonctions de transfert du hacheur BUCK en conduction continue

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{\alpha}} = V_e \frac{1}{1 + \frac{L}{R}p + LCp^2} \quad (9.2)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = \alpha \frac{1}{1 + \frac{L}{R}p + LCp^2} \quad (9.3)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{i}_L} = R \frac{1}{1 + RCp} \quad (9.4)$$

9.2.3.2 Fonctions de transfert du hacheur BUCK en conduction discontinue

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{\alpha}} = V_e \frac{1-y}{2-y} \sqrt{\frac{1-y}{K}} \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega c}} \quad (9.5)$$

avec $y = \frac{V_s}{V_e}$, $K = \frac{2LF}{R}$ et $\omega c = \frac{1}{RC} \cdot \frac{2-y}{1-y}$.

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{i}_L} = R \frac{\sqrt{K(1-y)}}{2-3y} \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega'c}} \quad (9.6)$$

avec $\omega'c = \frac{1}{RC} \cdot \frac{2-3y}{1-y}$. La dépendance de la tension de sortie vis-à-vis de la tension d'alimentation dans une commande en rapport cyclique est donnée par :

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = y \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega c}} \quad (9.7)$$

La dépendance de la tension de sortie vis-à-vis de la tension d'alimentation dans une commande en courant (régulation du courant dans l'inductance) est donnée par :

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = \frac{y^2}{3y-2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega'c}} \quad (9.8)$$

9.2.4 Simulations MATLAB du hacheur BUCK

[LIVRE034] N. MOHAN, T.M. UNDELAND, W.P. ROBBINS, *second edition, 1995, Chapter 4, §4-7, pages 73-74.*

```

% Définition des composants :
Ve = 8
L = 5e-6
RL = 1e-3
C = 100e-6
R = 1
F = 100e3
alpha = 0.75

% Calculs des constantes :
T = 1/F
N = 50 % Nombre de périodes.
Tmax = N*T
pas = 100 % Nb de points par période.
dt = T/pas

% Découpage de la tension d'entrée :
t = [0:dt:Tmax];
y = t/T - fix(t/T);
v = Ve*(alpha>y);

% Préparation des matrices :
A = [-RL/L -1/L; 1/C -1/(R*C)];
B = [1/L 0]';
MN = inv(eye(2) - dt/2*A);
M = MN*(eye(2) + dt/2*A);
N = MN*dt/2*B;

% Conditions initiales :
% il(1) = 0
% vc(1) = 0

vc(1) = alpha*Ve
il(1) = vc(1)/R

maxi = length(t)

% Calculs des points par la méthode
d'intégration par trapèze :
for k = 2:maxi
    X = M*[ il(k-1) vc(k-1) ]' + N*(
v(k) + v(k-1) );
    il(k) = X(1);
    vc(k) = X(2);
end;

% Fonction de transfert linéaire ::
sys = tf([alpha],[L*C L/R 1])
vs1 = Ve*step(sys,t)';

% Affichage des grandeurs % Réponse de
la fonction de transfert linéaire ::
figure(1);
plot(t,il,'r',t,vc,'b');
grid

```

```

Ve =      8
L =      5e-006
RL =     0.001
C =     0.0001
R =      1
F =    100000
alpha =  0.75

T =     1e-005
N =      50
Tmax =  0.0005
pas =    100
dt =    1e-007

A =    -200      -2e+005
      10000     -10000

B =     2e+005
      0

M =           0.99997      -
0.01999
      0.00099949
0.99899

N =     0.0099999
      4.9974e-006

vc =      6
il =      6

maxi =    5001

Transfer function:
          0.75
-----
5e-010 s^2 + 5e-006 s + 1

```

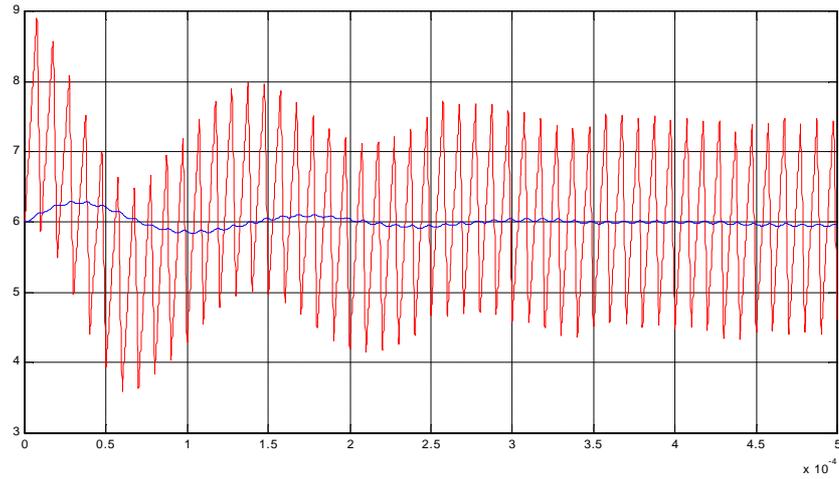


Fig. 9.3. Réponse du filtre du hacheur de type BUCK avec 6V et 6A
(*orcad\iut3\UC3842B\matlab\filtre1.m*).

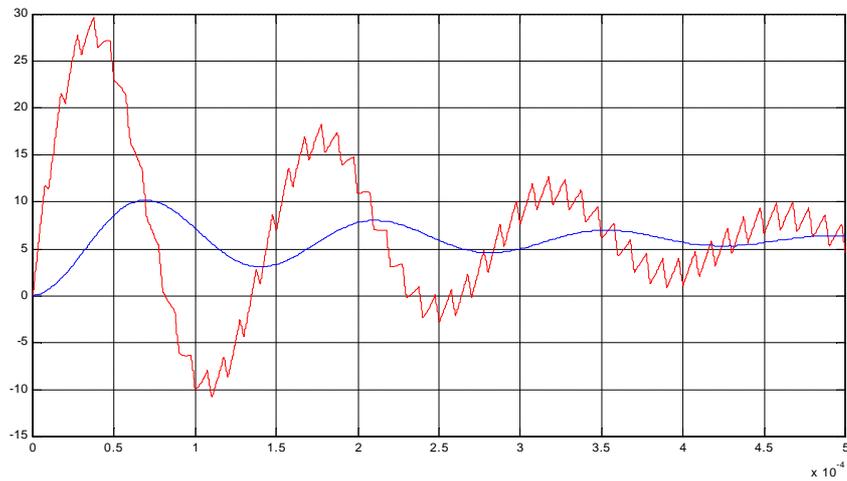


Fig. 9.4. Démarrage du filtre du hacheur de type BUCK
(*orcad\iut3\UC3842B\matlab\filtre1.m*).

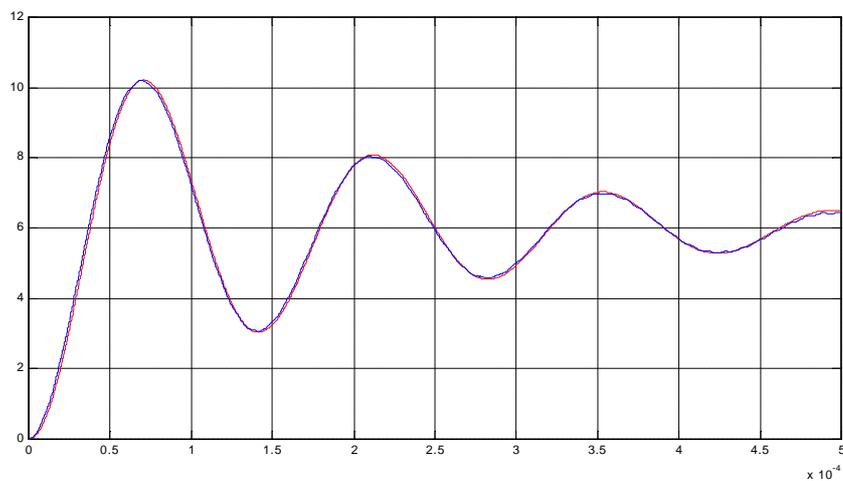


Fig. 9.5. Comparaison de la fonction de transfert et de la simulation (filtre du hacheur de type BUCK)
(*orcad\iut3\UC3842B\matlab\filtre1.m*).

9.2.5 Simulations PSIM du hacheur BUCK

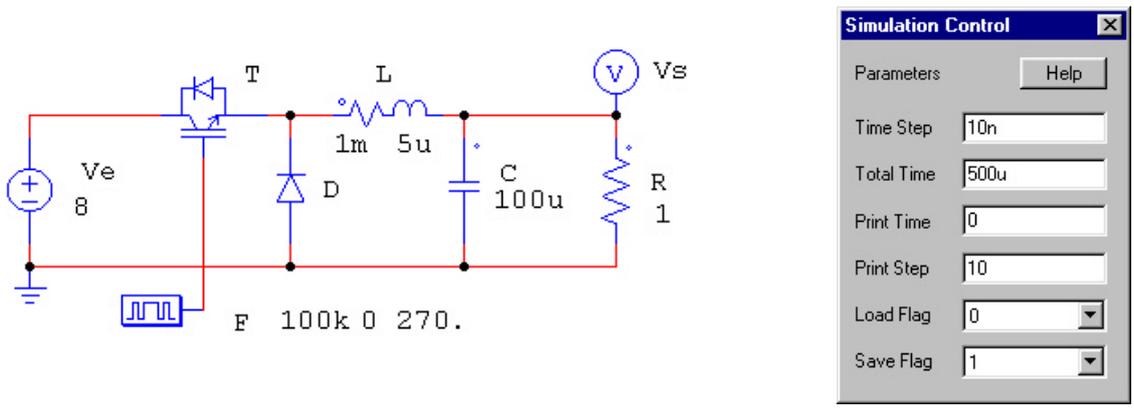


Fig. 9.6. Schéma du hacheur de type BUCK sous SimCAD PSIM demo version 5.0 (orcad\iut3\UC3842B\PSIM\buck-1.sch).

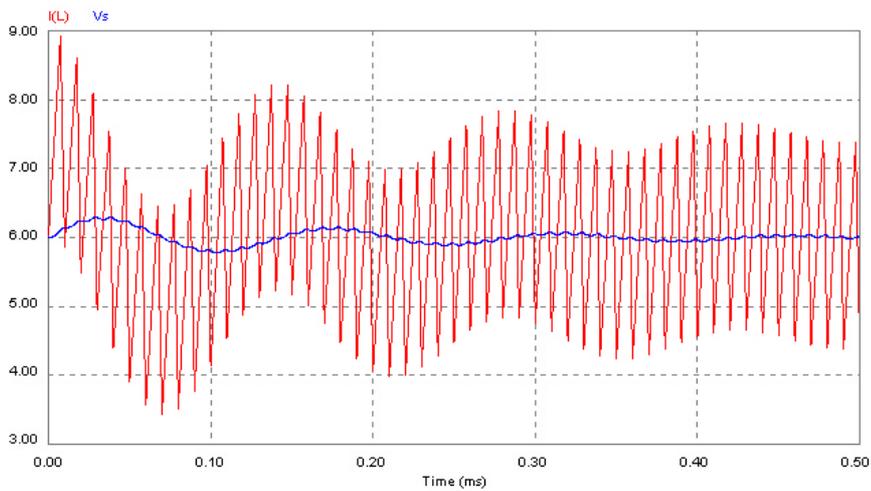


Fig. 9.7. Réponse du filtre du hacheur de type BUCK avec 6V et 6A (orcad\iut3\UC3842B\PSIM\buck-1.sch).

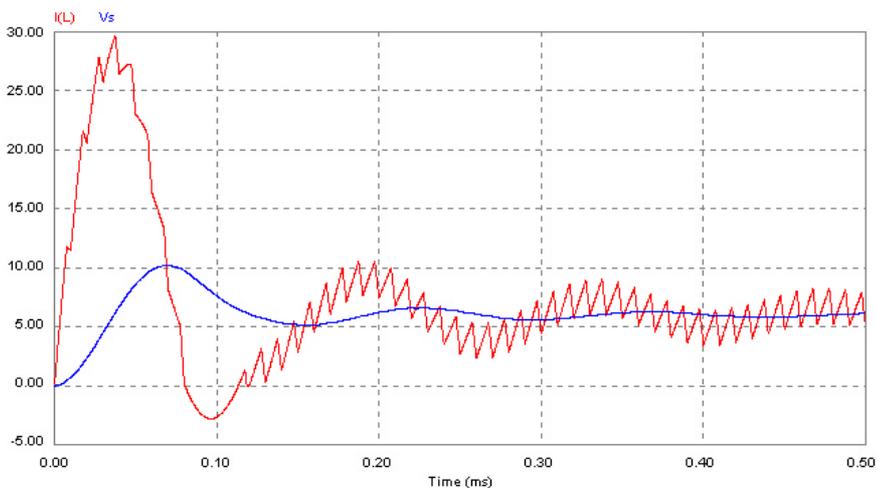


Fig. 9.8. Démarrage du filtre du hacheur de type BUCK (orcad\iut3\UC3842B\PSIM\buck-1.sch).

9.3 Cas du hacheur de type BOOST

9.3.1 Définition

Hacheur élévateur, hacheur survolteur, hacheur parallèle, hacheur de type BOOST, boost chopper.

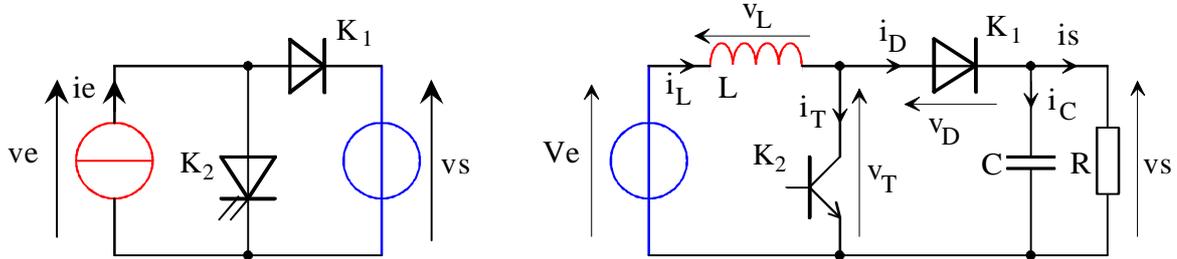


Fig. 9.9. La fonction hacheur BOOST (dessins\boost7.drw).

C'est un convertisseur direct DC-DC. La source d'entrée est de type courant continu (inductance en série avec une source de tension) et la charge de sortie est de type tension continue (condensateur en parallèle avec la charge résistive). L'interrupteur K1 peut être remplacé par un transistor puisque le courant est toujours positif et que les commutations doivent être commandées (au blocage et à l'amorçage).

9.3.2 Fonctionnement

L'interrupteur K1 est fermé pendant la fraction αT de la période de découpage T. La source d'entrée fournit l'énergie à la charge R au travers de l'inductance L.

Lors du blocage du transistor, la diode K2 assure la continuité du courant dans l'inductance. L'énergie emmagasinée dans cette inductance est alors déchargée dans le condensateur et la résistance de charge.

Les formes d'ondes en conduction continue sont représentée à la figure 9.10. En régime permanent, la valeur moyenne de la tension aux bornes de l'inductance est nulle, ce qui impose la relation suivante :

$$V_e = \langle v_e \rangle = \langle v_T \rangle = (1 - \alpha) \times V_s \quad \text{soit} \quad V_s = V_e \times \frac{1}{1 - \alpha} \quad (9.9)$$

Par définition, $0 \leq \alpha \leq 1$, ce qui induit que le montage est élévateur de tension (survolteur).

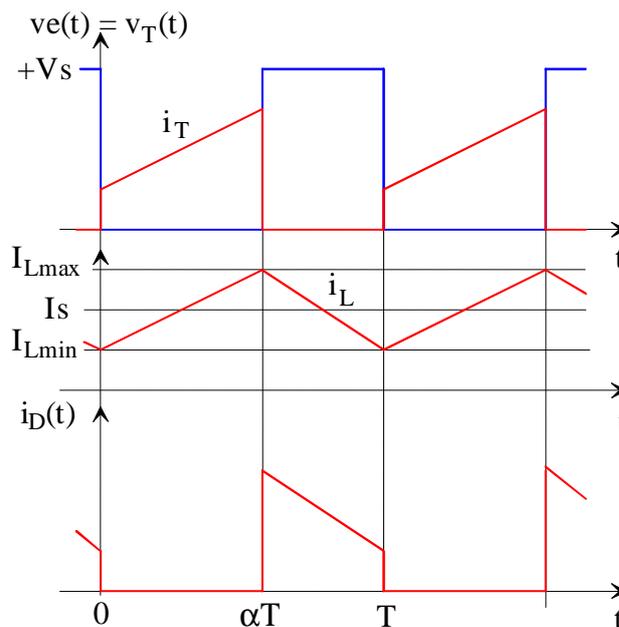


Fig. 9.10. Formes d'ondes du hacheur de type BOOST (dessins\boost7.drw).

9.3.3 Modélisation linéaire

[LIVRE122] J.-P. FERRIEUX, F. FOREST, 3e édition, 1999, Annexe B, §2, page 307.

9.3.3.1 Fonctions de transfert du hacheur BOOST en conduction continue

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{\alpha}} = \frac{V_s}{1-\alpha} \cdot \frac{1 - \frac{L}{R(1-\alpha)^2} p}{1 + \frac{L}{R(1-\alpha)^2} p + \frac{LC}{(1-\alpha)^2} p^2} \quad (9.10)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{L}{R(1-\alpha)^2} p + \frac{LC}{(1-\alpha)^2} p^2} \quad (9.11)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{i}_L} = \frac{R(1-\alpha)}{2} \cdot \frac{1 - \frac{L}{R(1-\alpha)^2} p}{1 + \frac{RC}{2} p} \quad (9.12)$$

9.3.3.2 Fonctions de transfert du hacheur BOOST en conduction discontinue

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{\alpha}} = \frac{2V_e}{2y-1} \sqrt{\frac{y}{K}(y-1)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega c}} \quad (9.13)$$

avec $y = \frac{V_s}{V_e}$, $K = \frac{2LF}{R}$ et $\omega c = \frac{1}{RC} \cdot \frac{2y-1}{y-1}$.

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{i}_L} = \frac{R}{2y-1} \sqrt{K \cdot y(1-y)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega c}} \quad (9.14)$$

La dépendance de la tension de sortie vis-à-vis de la tension d'alimentation dans une commande en rapport cyclique est donnée par :

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = y \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega c}} \quad (9.15)$$

La dépendance de la tension de sortie vis-à-vis de la tension d'alimentation dans une commande en courant (régulation du courant dans l'inductance) est donnée par :

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = \frac{y}{2y-1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega c}} \quad (9.16)$$

9.3.3.3 Fonctions de transfert du BOOST en tenant compte de la résistance de l'inductance

[LIVRE122] J.-P. FERRIEUX, F. FOREST, 3^e édition, 1999, Annexe B, §2, page 307.

[DIV422] M. CORREVEON, Modélisation DC et AC des alimentations à découpage, page 33.

On pose r la résistance de l'inductance d'entrée L . Les principales relations du hacheur de type BOOST sont :

$$\begin{cases} L \cdot \frac{di_L}{dt} = \alpha \cdot (ve - r \cdot i_L) + (1 - \alpha) \cdot (ve - r \cdot i_L - vs) \\ \quad = ve - r \cdot i_L - (1 - \alpha) \cdot vs \\ C \cdot \frac{dvs}{dt} = \alpha \cdot \left(-\frac{vs}{R} \right) + (1 - \alpha) \cdot \left(-\frac{vs}{R} + i_L \right) \\ \quad = -\frac{vs}{R} + (1 - \alpha) \cdot i_L \end{cases} \quad (9.17)$$

Avec $x(t) = \tilde{x}(t) + X$, simplifiée sous la forme $x = \tilde{x} + X$, on obtient :

$$\begin{cases} L \cdot \frac{d(I_L + \tilde{i}_L)}{dt} = Ve + \tilde{v}e - r \cdot I_L - r \cdot \tilde{i}_L - (1 - A - \tilde{\alpha}) \cdot (Vs + \tilde{v}s) \\ C \cdot \frac{d(Vs + \tilde{v}s)}{dt} = -\frac{Vs + \tilde{v}s}{R} + (1 - A - \tilde{\alpha}) \cdot (I_L + \tilde{i}_L) \end{cases} \quad (9.18)$$

Soit en continu (terme DC) :

$$\begin{cases} 0 = Ve - r \cdot I_L - (1 - A) \cdot Vs \\ 0 = -\frac{Vs}{R} + (1 - A) \cdot I_L \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} Vs = \frac{Ve - r \cdot I_L}{(1 - A)} \\ I_L = \frac{Vs}{(1 - A) \cdot R} = \frac{Is}{(1 - A)} \end{cases} \quad (9.19)$$

En régime variable au premier ordre (terme AC) :

$$\begin{cases} L \cdot \frac{d\tilde{i}_L}{dt} \approx \tilde{v}e - r \cdot \tilde{i}_L + \tilde{\alpha} \cdot Vs - (1 - A) \cdot \tilde{v}s \\ C \cdot \frac{d\tilde{v}s}{dt} \approx -\frac{\tilde{v}s}{R} + (1 - A) \cdot \tilde{i}_L - \tilde{\alpha} \cdot I_L \end{cases} \quad (9.20)$$

En effectuant la transformée de Laplace et sachant que $I_L = \frac{Vs}{(1 - A) \cdot R}$, on obtient :

$$\begin{cases} L \cdot p \cdot \tilde{i}_L = \tilde{v}e - r \cdot \tilde{i}_L + \tilde{\alpha} \cdot Vs - (1 - A) \cdot \tilde{v}s \\ R \cdot C \cdot p \cdot \tilde{v}s = -\tilde{v}s + (1 - A) \cdot R \cdot \tilde{i}_L - \tilde{\alpha} \cdot \frac{Vs}{(1 - A)} \end{cases} \quad (9.21)$$

De la première relation, on extrait $\tilde{i}_L = \frac{\tilde{v}e + \tilde{\alpha} \cdot Vs - (1 - A) \cdot \tilde{v}s}{r + L \cdot p}$. En reportant dans la deuxième relation,

on obtient $(1 + R \cdot C \cdot p) \cdot \tilde{v}s = (1 - A) \cdot R \cdot \left(\frac{\tilde{v}e + \tilde{\alpha} \cdot Vs - (1 - A) \cdot \tilde{v}s}{r + L \cdot p} \right) - \tilde{\alpha} \cdot \frac{Vs}{(1 - A)}$.

$$(1+R \cdot C \cdot p) \cdot \tilde{v}_s = \frac{R(1-A)}{r} \frac{1+\frac{L}{r} \cdot p}{1+\frac{L}{r} \cdot p} \cdot \tilde{v}_e + \frac{R(1-A)}{r} \frac{1+\frac{L}{r} \cdot p}{1+\frac{L}{r} \cdot p} \cdot \tilde{\alpha} \cdot V_s - \frac{R(1-A)^2}{r} \frac{1+\frac{L}{r} \cdot p}{1+\frac{L}{r} \cdot p} \cdot \tilde{v}_s - \tilde{\alpha} \cdot \frac{V_s}{(1-A)}$$

$$\left(\frac{R(1-A)^2}{r} \frac{1+\frac{L}{r} \cdot p}{1+\frac{L}{r} \cdot p} + 1 + R \cdot C \cdot p \right) \cdot \tilde{v}_s = \frac{R(1-A)}{r} \frac{1+\frac{L}{r} \cdot p}{1+\frac{L}{r} \cdot p} \cdot \tilde{v}_e + \left(\frac{R(1-A)^2}{r} \frac{1+\frac{L}{r} \cdot p}{1+\frac{L}{r} \cdot p} - 1 \right) \cdot \frac{V_s}{(1-A)} \cdot \tilde{\alpha}$$

Le coefficient de $\tilde{\alpha}$ vaut :

$$\left(\frac{R(1-A)^2}{r} \frac{1+\frac{L}{r} \cdot p}{1+\frac{L}{r} \cdot p} - 1 \right) \cdot \frac{V_s}{(1-A)} = \left(\frac{\frac{R(1-A)^2}{r} - 1 - \frac{L}{r} \cdot p}{1+\frac{L}{r} \cdot p} \right) \cdot \frac{V_s}{(1-A)}$$

$$= \left(\frac{R(1-A)^2}{r} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{L}{R(1-A)^2 - r} \cdot p}{1+\frac{L}{r} \cdot p} \right) \cdot \frac{V_s}{(1-A)}$$

Le coefficient de \tilde{v}_s vaut :

$$\left(\frac{R(1-A)^2}{r} \frac{1+\frac{L}{r} \cdot p}{1+\frac{L}{r} \cdot p} + 1 + R \cdot C \cdot p \right) = \frac{\frac{R(1-A)^2}{r} (1+\frac{L}{r} \cdot p) + (1+R \cdot C \cdot p)(1+\frac{L}{r} \cdot p)}{1+\frac{L}{r} \cdot p}$$

$$= \frac{\frac{R(1-A)^2}{r} + 1 + \frac{L}{r} \cdot p + R \cdot C \cdot p + \frac{R}{r} \cdot L \cdot C \cdot p^2}{1+\frac{L}{r} \cdot p}$$

$$= \frac{R(1-A)^2 + r}{r} \cdot \frac{1 + \frac{L+r \cdot R \cdot C}{R(1-A)^2 + r} \cdot p + \frac{R}{R(1-A)^2 + r} \cdot L \cdot C \cdot p^2}{1+\frac{L}{r} \cdot p}$$

L'expression de \tilde{v}_s en fonction de \tilde{v}_e et $\tilde{\alpha}$ vaut alors :

$$\tilde{v}_s = \frac{R(1-A)}{R(1-A)^2 + r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{L+r \cdot R \cdot C}{R(1-A)^2 + r} \cdot p + \frac{R}{R(1-A)^2 + r} \cdot L \cdot C \cdot p^2} \cdot \tilde{v}_e$$

$$+ \left(\frac{R(1-A)^2 - r}{R(1-A)^2 + r} \right) \left(\frac{1 - \frac{L}{R(1-A)^2 - r} \cdot p}{1 + \frac{L+r \cdot R \cdot C}{R(1-A)^2 + r} \cdot p + \frac{R}{R(1-A)^2 + r} \cdot L \cdot C \cdot p^2} \right) \cdot \frac{V_s}{(1-A)} \cdot \tilde{\alpha}$$

La fonction de transfert $H_\alpha(p) = \frac{\tilde{v}_s(p)}{\tilde{\alpha}(p)}$ vaut alors :

$$H_\alpha = \frac{V_s}{(1-A)} \cdot \frac{R(1-A)^2 - r}{R(1-A)^2 + r} \cdot \frac{1 - \frac{L}{R(1-A)^2 - r} \cdot p}{1 + \frac{L+r \cdot R \cdot C}{R(1-A)^2 + r} \cdot p + \frac{R}{R(1-A)^2 + r} \cdot L \cdot C \cdot p^2} \quad (9.22)$$

On vérifie que pour $r \equiv 0$, on obtient $H_\alpha = \frac{V_s}{(1-A)} \cdot \frac{1 - \frac{L}{R(1-A)^2} \cdot p}{1 + \frac{L}{R(1-A)^2} \cdot p + \frac{L \cdot C}{(1-A)^2} \cdot p^2}$ qui est la fonction

de transfert établit précédemment.

9.3.4 Essais expérimentaux en boucle ouverte

Le cahier des charges est le suivant :

- $V_e = 25\text{V}$ et $I_e = 2\text{A}$
- $V_s = 50\text{V}$ et $I_s = 1\text{A}$ ($R_s = 50\Omega$)
- Hacheur H2Qa – IRF540N 100V 33A 52 mΩ – $L_e = 325\text{ uH}$ – $C_s = 660\text{ }\mu\text{F}$.

Fig. 9.11. Essais en boucle ouverte.

9.3.5 Simulations PSIM

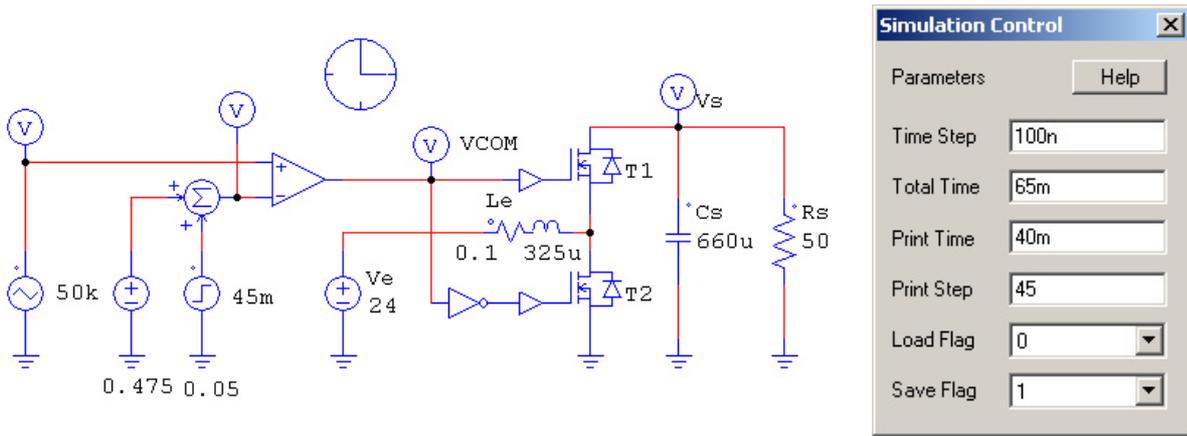


Fig. 9.12. Schéma de simulation en boucle ouverte (projet\karting\boost-140A\boost3.sch).

9.3.5.1 Simulation 1 : on tient compte des semi-conducteurs

La résistance de l'inductance d'entrée est fixé $r = 0,1 \Omega$. La résistance des transistors MOSFET vaut $R_{DS(ON)} = 50 \text{ m}\Omega$. La chute de tension des diodes de roue libre vaut $V_F = 0,6 \text{ V}$.

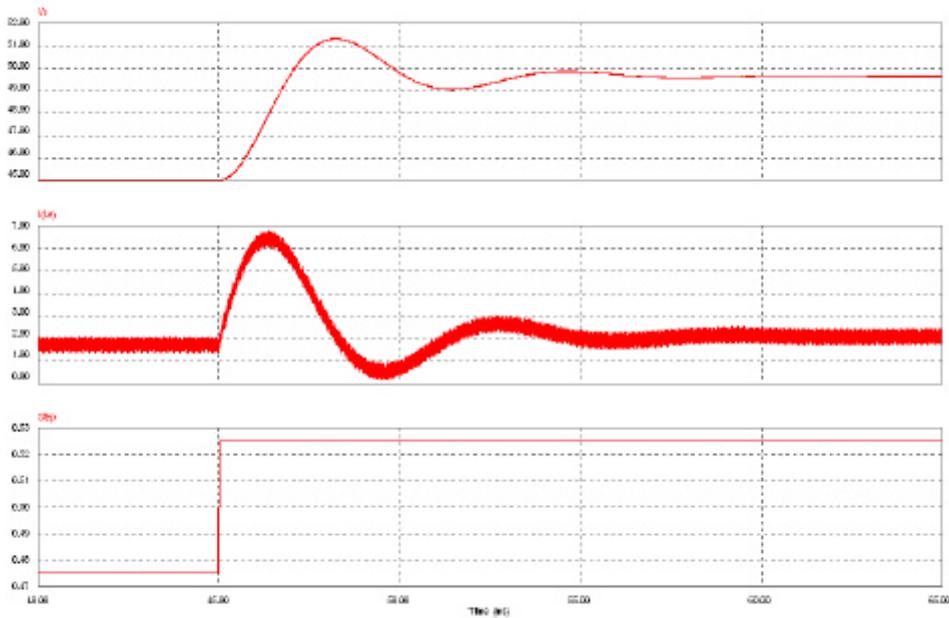


Fig. 9.13. Résultats de simulation en boucle ouverte (projet\karting\boost-140A\boost3.sch).

9.3.5.2 Simulation 1 : identification du système du second ordre équivalent

Valeur initiale = $\alpha_0 = 0,475$ – Valeur finale = $\alpha_1 = 0,525$ – Amplitude $\Delta\alpha = 0,050$

Valeur initiale = $V_{s0} = 45 \text{ V}$ – Valeur finale = $V_{s1} = 49,6 \text{ V}$ – Amplitude $\Delta V_s = 4,6 \text{ V}$

Le gain statique du système vaut $K = \frac{\Delta V_s}{\Delta\alpha} = 92$

Premier dépassement = $D1 = 51,3 \text{ V}$ – Dépassement relatif = $d = \frac{D1 - V_{S1}}{V_{S1} - V_{S0}} = 37 \%$

On sait que $d = e^{-\frac{m \cdot \pi}{\sqrt{1-m^2}}}$. L'amortissement vaut $m = \frac{A}{\sqrt{1+A^2}}$ avec $A = \frac{-\ln(d)}{\pi}$ soit $m = 0,302$.

Pseudo période = $T_0 = 54,7 - 48,23 = 6,47 \text{ ms}$ soit $\omega_0 = 971 \text{ rd/s}$.

9.3.5.3 Simulation 2 : les semi-conducteurs sont parfaits

La résistance de l'inductance d'entrée est fixé $r = 0,2 \Omega$. La résistance des transistors MOSFET vaut $R_{DS(ON)} = 0 \text{ m}\Omega$. La chute de tension des diodes de roue libre vaut $V_F = 0 \text{ V}$.

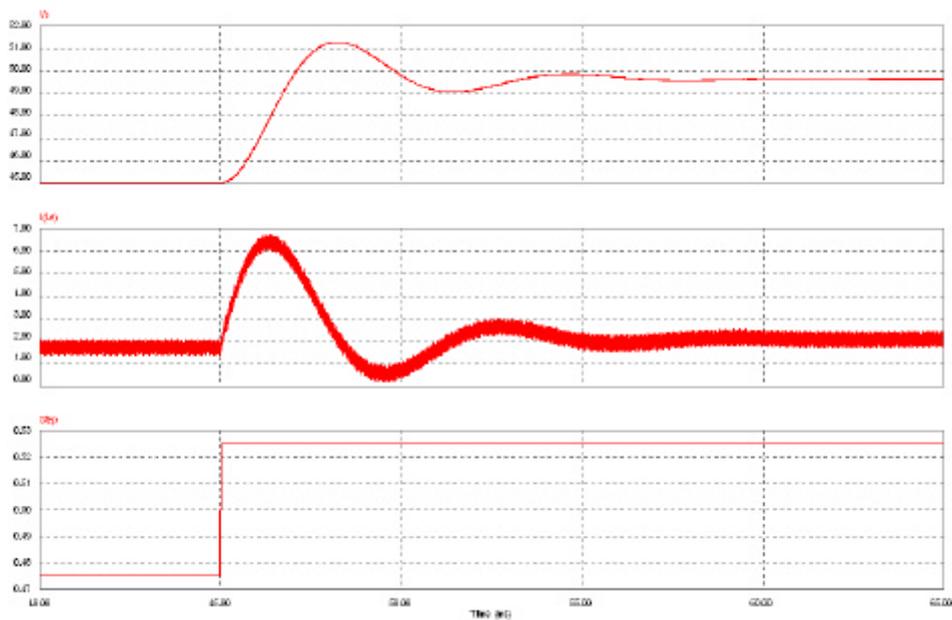


Fig. 9.14. Résultats de simulation en boucle ouverte (projet\karting\boost-140A\boost3.sch).

9.3.5.4 Simulation 2 : identification du système du second ordre équivalent

Valeur initiale = $\alpha_0 = 0,475$ – Valeur finale = $\alpha_1 = 0,525$ – Amplitude $\Delta\alpha = 0,050$

Valeur initiale = $V_{S0} = 45 \text{ V}$ – Valeur finale = $V_{S1} = 49,6 \text{ V}$ – Amplitude $\Delta V_S = 4,6 \text{ V}$

Le gain statique du système vaut $K = \frac{\Delta V_S}{\Delta\alpha} = 92$

Premier dépassement = $D1 = 51,28 \text{ V}$ – Dépassement relatif = $d = \frac{D1 - V_{S1}}{V_{S1} - V_{S0}} = 36,5 \%$

On sait que $d = e^{-\frac{m \cdot \pi}{\sqrt{1-m^2}}}$. L'amortissement vaut $m = \frac{A}{\sqrt{1+A^2}}$ avec $A = \frac{-\ln(d)}{\pi}$ soit $m = 0,305$.

Pseudo période = $T_0 = 54,72 - 48,23 = 6,46 \text{ ms}$ soit $\omega_0 = 968 \text{ rd/s}$.

9.3.6 Simulations MATLAB–SIMULINK

La réponse en boucle ouverte de la fonction de transfert $H_{BO} = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ avec $K = 92$ (ou 92,97), $m = 0,305$ (ou 0,296) et $\omega_0 = 972$ rd/s (ou 1088 rd/s) est donnée à la figure suivante.

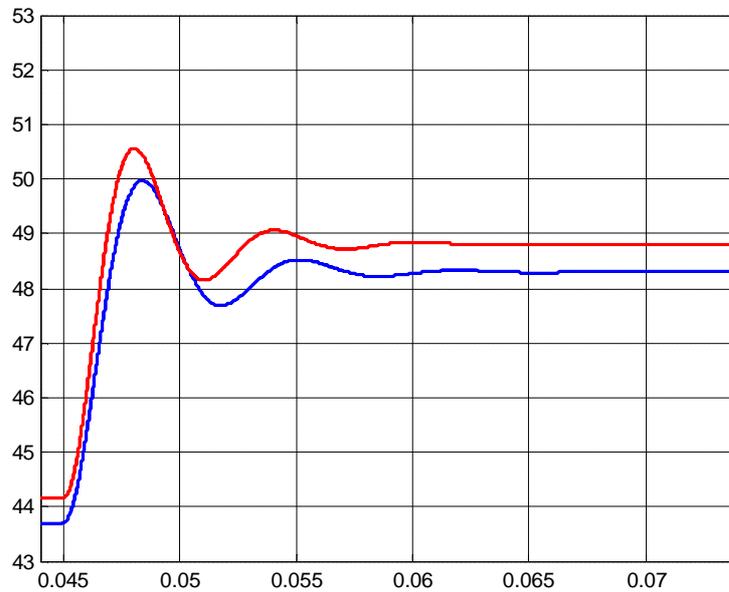


Fig. 9.15. Résultats de simulation MATLAB en boucle ouverte (projet\karting\boost-140A\boost.m).

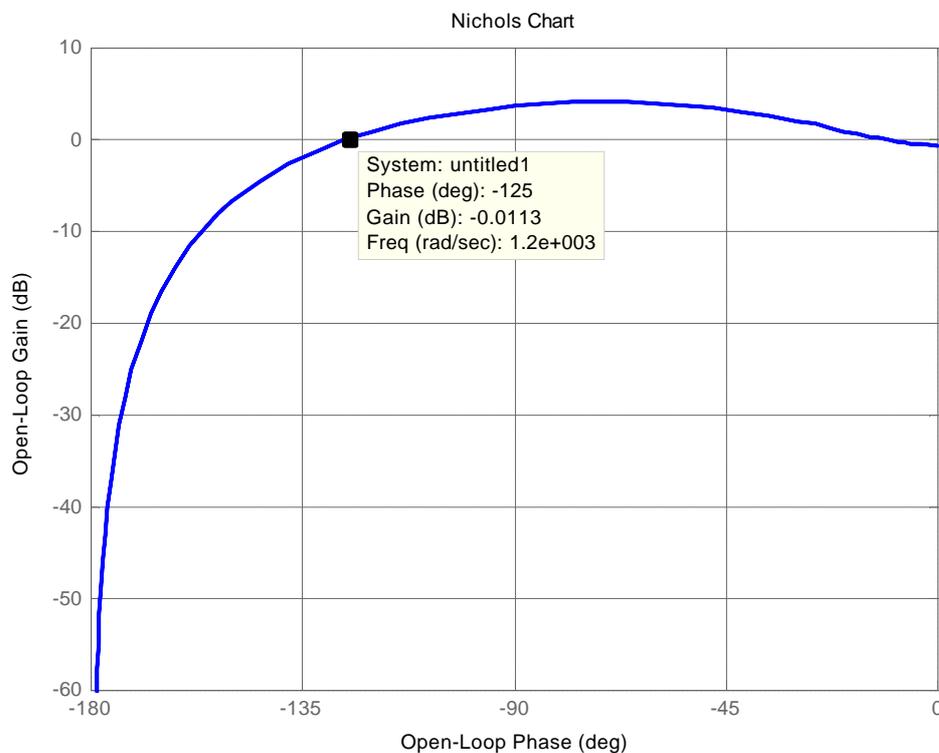


Fig. 9.16. Réponse fréquentielle en boucle ouverte (projet\karting\boost-140A\boost.m).

On place un correcteur PI $K_P \cdot \left(\frac{1 + \tau_I \cdot p}{\tau_I \cdot p} \right)$ avec $K_P = 1$ et $\tau_I = \frac{10}{\omega_0} = 10,28$ ms.

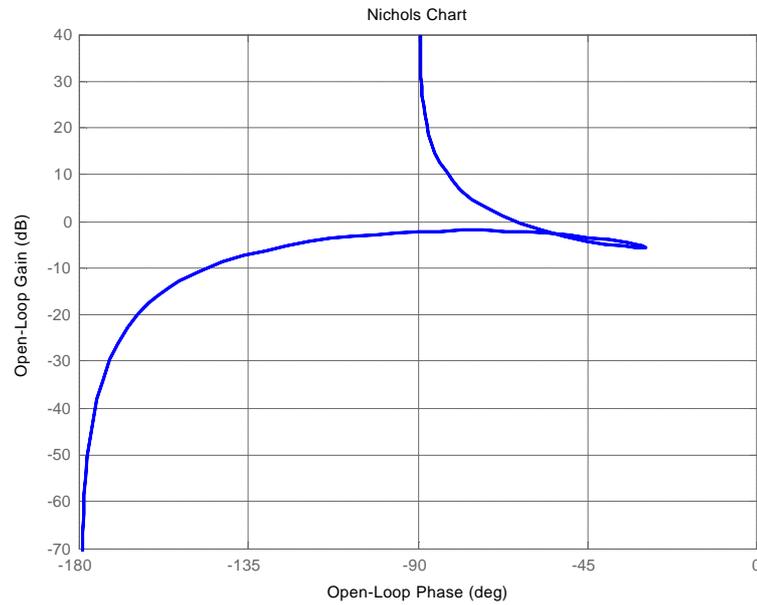


Fig. 9.17. Réponse fréquentielle en boucle ouverte avec le correcteur (projet\karting\boost-140A\boost.m).

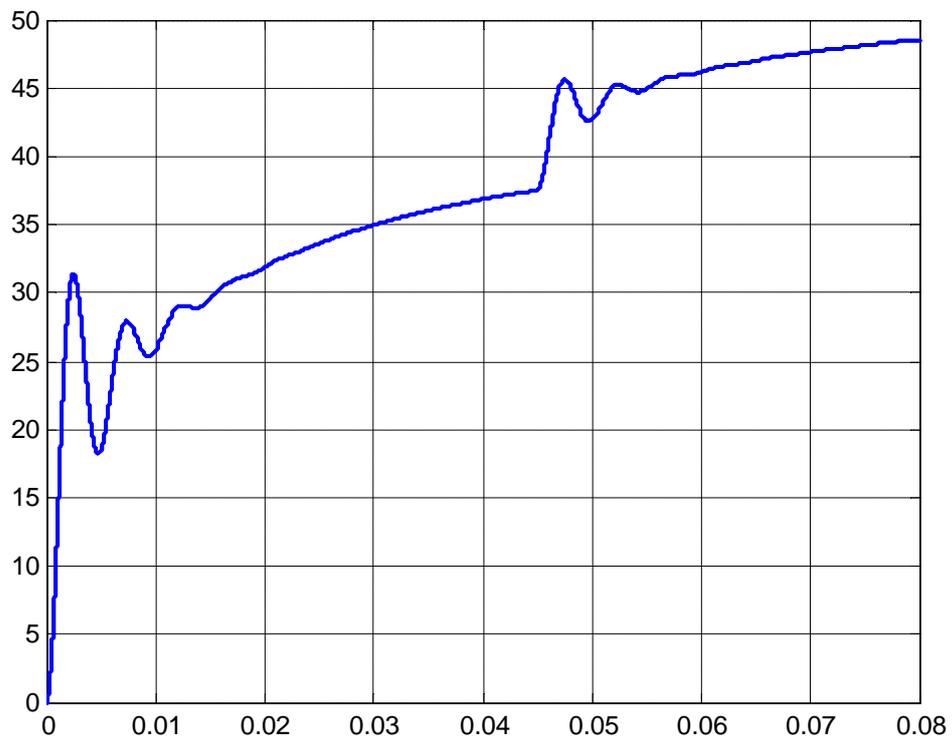


Fig. 9.18. Réponse temporelle en boucle fermée (projet\karting\boost-140A\boost.m).

9.4 Cas du hacheur de type BUCK-BOOST

9.4.1 Définition

Hacheur inverseur, dévolteur-survolteur, de type BUCK-BOOST, buck-boost chopper, inverter chopper.

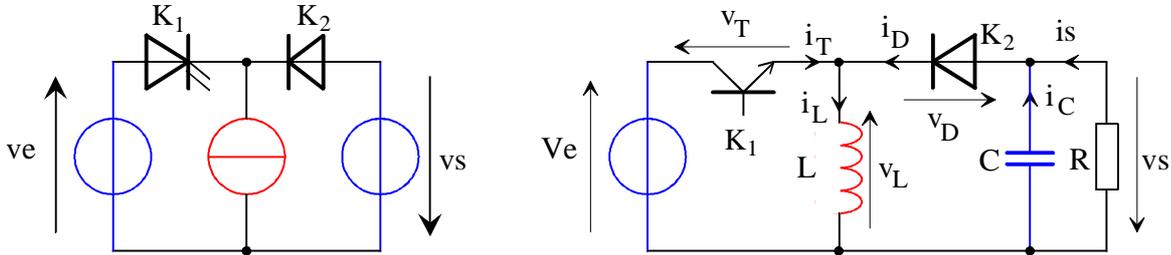


Fig. 9.19. La fonction hacheur inverseur (dessins\buckboo1.drw).

Le hacheur inverseur est un convertisseur indirect DC-DC à stockage inductif. La source d'entrée est de type tension continue (filtrage capacitif en parallèle avec une source de tension) et la charge de sortie continue de type source de tension (condensateur en parallèle avec la charge résistive). L'interrupteur K1 peut être remplacé par un transistor puisque le courant est toujours positif et que les commutations doivent être commandées (au blocage et à l'amorçage).

9.4.2 Fonctionnement

L'interrupteur K1 est fermé pendant la fraction αT de la période de découpage T. La source d'entrée fournit l'énergie à l'inductance L. La charge est déconnecté du montage (diode K2 bloquée).

Lors du blocage du transistor, la diode K2 assure la continuité du courant dans l'inductance. L'énergie emmagasinée dans cette inductance est alors déchargée dans le condensateur et la résistance de charge.

Les formes d'ondes en conduction continue sont représentée à la figure 9.2. En régime permanent, la valeur moyenne de la tension aux bornes de l'inductance est nulle, ce qui impose la relation suivante :

$$V_s = V_e \cdot \frac{\alpha}{1 - \alpha} \tag{9.23}$$

Par définition, $0 \leq \alpha \leq 1$, ce qui induit que le montage est abaisseur ET élévateur de tension (négative).

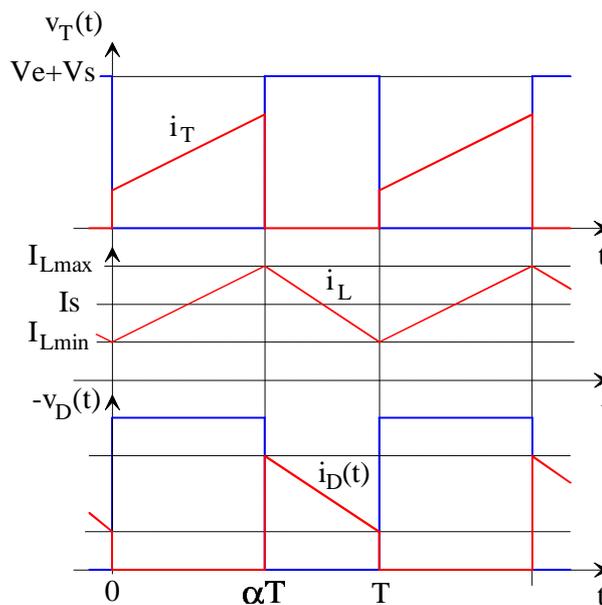


Fig. 9.20. Formes d'ondes du hacheur BUCK-BOOST (dessins\buckboo1.drw).

9.4.3 Modélisation linéaire

[LIVRE122] J.-P. FERRIEUX, F. FOREST, 3e édition, 1999, Annexe B, §3, page 308.

9.4.3.1 Fonctions de transfert du hacheur BUCK-BOOST en conduction continue

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{\alpha}} = \frac{V_s}{\alpha(1-\alpha)} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha L}{R(1-\alpha)^2}}{1 + \frac{L}{R(1-\alpha)^2} p + \frac{LC}{(1-\alpha)^2} p^2} \quad (9.24)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{L}{R(1-\alpha)^2} p + \frac{LC}{(1-\alpha)^2} p^2} \quad (9.25)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{i}_L} = R \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha L}{R(1-\alpha)^2} p}{1 + \frac{RC}{1+\alpha} p} \quad (9.26)$$

9.4.3.2 Fonctions de transfert du hacheur BUCK-BOOST en conduction discontinue

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{\alpha}} = \frac{V_e}{\sqrt{K}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{RC}{2} p} \quad \text{avec } K = \frac{2LF}{R}. \quad (9.27)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{i}_L} = \frac{R}{2} \sqrt{K} \cdot \frac{1}{1 + \frac{RC}{2} p} \quad (9.28)$$

La dépendance de la tension de sortie vis-à-vis de la tension d'alimentation dans une commande en rapport cyclique est donnée par :

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = \frac{V_s}{V_e} \frac{1}{1 + \frac{RC}{2} p} \quad (9.29)$$

La dépendance de la tension de sortie vis-à-vis de la tension d'alimentation dans une commande en courant (régulation du courant dans l'inductance) est donnée par $\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = 0$.

9.4.3.3 Fonctions de transfert du hacheur BUCK-BOOST en régime auto-oscillant

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = \frac{y^2}{2y+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega c}} \quad (9.30)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{i}_L} = \frac{R}{2} \frac{1}{2y+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega c}} \quad (9.31)$$

$$\text{avec } y = \frac{V_s}{V_e} \quad \text{et } \omega c = \frac{1}{RC} \cdot \frac{2y+1}{y+1}.$$

9.4.4 Simulations MATLAB

+24V → -15V

9.4.5 Simulations PSIM

Tableau 9.1. Valeurs des tensions harmoniques en % de la tension nominale $U_n = U_1$.

9.5 Cas de l'alimentation FLYBACK

9.5.1 Schéma du montage

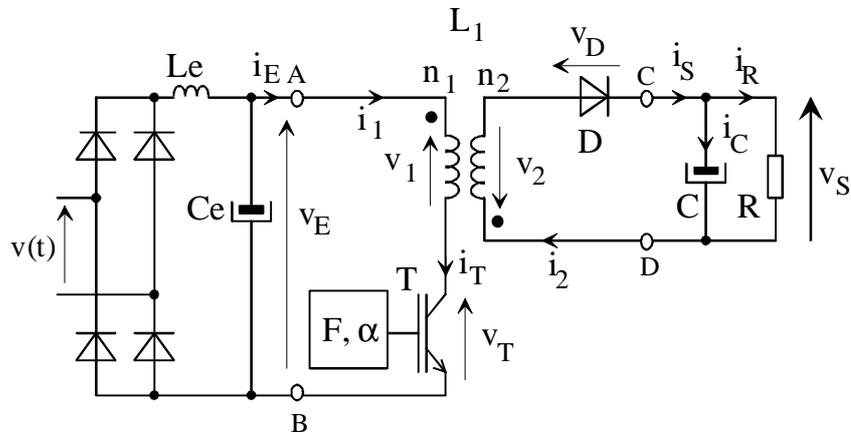


Fig. 9.21. Alimentation à découpage asymétrique de type FLYBACK (dessins\flyback3.drw).

9.5.2 Relations de base

Tension moyenne aux bornes de l'inductance magnétisante :

$$\langle v_1 \rangle_T = \langle L_1 \frac{di_{10}}{dt} \rangle_T = \alpha(t) \cdot v_e(t) + [1 - \alpha(t)] \cdot \frac{v_s(t)}{m} \quad (9.32)$$

Courant moyen dans le condensateur de sortie :

$$\langle i_C \rangle_T = \langle C \frac{dvs}{dt} \rangle_T = \alpha(t) \cdot \frac{-v_s(t)}{R} + [1 - \alpha(t)] \cdot \left[\frac{-v_s(t)}{R} + \frac{i_{10}(t)}{m} \right] \quad (9.33)$$

9.5.3 Linéarisation

9.5.4 Modélisation linéaire

[LIVRE122] J.-P. FERRIEUX, F. FOREST, 3e édition, 1999, Annexe B, §3, page 308.

9.5.4.1 Fonctions de transfert de l'alimentation FLYBACK en conduction continue

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{\alpha}} = \frac{V_s}{\alpha(1-\alpha)} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha L}{R(1-\alpha)^2}}{1 + \frac{L}{R(1-\alpha)^2} p + \frac{LC}{(1-\alpha)^2} p^2} \quad (9.34)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{L}{R(1-\alpha)^2} p + \frac{LC}{(1-\alpha)^2} p^2} \quad (9.35)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{i}_L} = R \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha L}{R(1-\alpha)^2} p}{1 + \frac{RC}{1+\alpha} p} \quad (9.36)$$

9.5.4.2 Fonctions de transfert de l'alimentation FLYBACK en conduction discontinue

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{\alpha}} = \frac{V_e}{\sqrt{K}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{RC}{2} p} \quad \text{avec } K = \frac{2LF}{R} \quad (9.37)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{i}_L} = \frac{R}{2} \sqrt{K} \cdot \frac{1}{1 + \frac{RC}{2} p} \quad (9.38)$$

La dépendance de la tension de sortie vis-à-vis de la tension d'alimentation dans une commande en rapport cyclique est donnée par :

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = \frac{V_s}{V_e} \frac{1}{1 + \frac{RC}{2} p} \quad (9.39)$$

La dépendance de la tension de sortie vis-à-vis de la tension d'alimentation dans une commande en courant (régulation du courant dans l'inductance) est donnée nulle.

9.5.4.3 Fonctions de transfert de l'alimentation FLYBACK en régime auto-oscillant

[LIVRE122] J.-P. FERRIEUX, F. FOREST, 3e édition, 1999, Chapitre , §2.2, page 285-287

$$\tilde{v}_s(p) = H_1(p) \cdot \tilde{v}_e + H_2(p) \cdot \tilde{i}_{1M} \quad \text{et avec } y = \frac{V_s}{V_e} \quad \text{et } \omega c = \frac{1}{RC} \cdot \frac{2y+1}{y+1}.$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = \frac{my^2}{2y+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega c}} \quad (9.40)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{i}_{1M}} = \frac{R}{2m} \frac{1}{2y+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega c}} \quad (9.41)$$

9.5.5 Simulations MATLAB

9.5.6 Simulations PSIM

Tableau 9.2. Valeurs des tensions harmoniques en % de la tension nominale $U_n = U_1$.

9.6 Références bibliographiques

- [DIV346] Informations diverses sur la Modélisation des convertisseurs, février 2004.
- [DIV422] M. CORREVON, *SYSTEMES ELECTRONIQUES - Chapitre 11 - Modélisation DC et AC des alimentations à découpage*, EI-VD, HES-SO, http://ies.eivd.ch/Enseignement/cours/MCN/Systèmes_électroniques/Chap11.pdf , 12 février 2004.
- [LIVRE122] J.-P. FERRIEUX, F. FOREST, *Alimentations à découpage - Convertisseurs à résonance*, 3e édition revue et augmentée, 1999.
- [LIVRE032] P.-T. KREIN, *Element of power electronics*, Oxford University Press 1997.
- [LIVRE034] N. MOHAN, T.M. UNDELAND, W.P. ROBBINS, *Power Electronics - Converters, Applications and Design*, John Wiley & Sons, 1995 second edition, 802 pages.

9.7 Annexe 1 : résolution d'équations différentielles linéaires

[LIVRE034] N. MOHAN, T.M. UNDELAND, W.P. ROBBINS, second edition, 1995, Chapter 4, §4-5, pages 66-68.

9.7.1 Equations différentielles linéaires

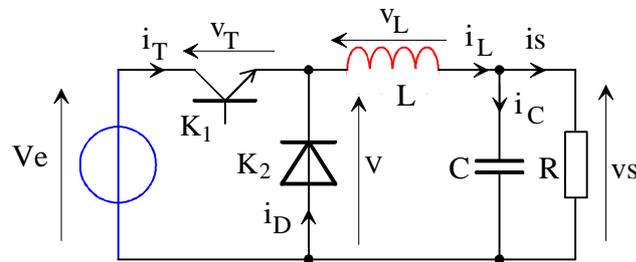


Fig. 9.22. Exemple de circuit : le hacheur BUCK (dessins\h_serie1.drw).

En tenant compte de la résistance R_L de l'inductance L , les relations du circuits (loi des mailles et lois des nœuds) sont :

$$\begin{cases} R_L i_L + L \frac{di_L}{dt} + v_s = v \\ i_L - C \frac{dv_s}{dt} - \frac{v_s}{R} = 0 \end{cases} \quad (9.42)$$

L'écriture matricielle de l'expression des dérivées donne :

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_s}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \quad (9.43)$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme générale $\frac{dx(t)}{dt} = A(t) \cdot x(t) + b(t) \cdot v(t)$, avec $x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_s(t) \end{bmatrix}$

le vecteur des variables d'état, $v(t)$ l'entrée du circuit. $A(t)$, la matrice de transition, et $b(t)$, la matrice d'entrée, peuvent être fonction du temps..

Pour un pas d'intégration Δt , la solution de l'équation (9.43) à l'instant t peut être exprimée à partir de la solution à l'instant $t - \Delta t$ par :

$$x(t) = x(t - \Delta t) + \int_{u=t-\Delta t}^{u=t} [A(u)x(u) + b(u)v(u)] du \quad (9.44)$$

9.7.2 Intégration par la méthode des trapèzes

9.8 Annexe 2 : modélisation de l'alimentation FLYBACK en mode auto-oscillant

9.8.1 Fonctionnement en mode auto-oscillant

[LIVRE025] BAUSIERE - Tome 3 - Chapitre 4 - page 169 - figure 4.5 - complexe...

[LIVRE122] FERRIEUX - Chapitre II page 55 - Fig. II.35 schéma de principe...

Ce mode de fonctionnement correspond à une démagnétisation complète de l'inductance (limite de conduction continue). L'interrupteur est bloqué sur une consigne du courant crête et est remis en conduction lors de l'annulation du courant secondaire : c'est une loi de Modulation de Largeur d'Impulsion à temps de conduction fixé.

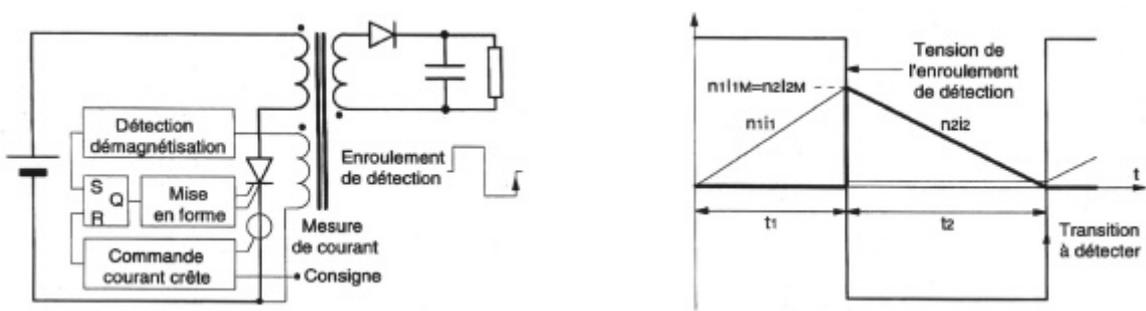


Fig. 9.23. Fonctionnement en mode auto-oscillant (images\fly_osc0&1 .jpg)

La fréquence de commutation est donc libre et dépendante de la charge. On a les relations suivantes :

$$n_1 \cdot I_{1\max} = n_2 \cdot I_{2\max} \quad (9.45)$$

$$t_1 = \frac{L_1 \cdot I_{1\max}}{V_e} \text{ car } i_{10}(t) = 0 + \frac{V_e}{L_1} \cdot t \quad (9.46)$$

$$t_2 = \frac{L_2 \cdot I_{2\max}}{V_s} = \frac{m \cdot L_1 \cdot I_{1\max}}{V_s} \text{ car } i_{10}(t) = 0 - \frac{V_s}{m \cdot L_1} \cdot (t - \alpha T) \quad (9.47)$$

$$L_2 = m^2 \cdot L_1 \quad (9.48)$$

$$F = \frac{1}{t_1 + t_2} \quad (9.49)$$

Pour évaluer les variations de fréquence F en fonction de la charge, on peut écrire : $\frac{t_1}{t_2} = \frac{V_s}{mV_e}$. On en

déduit $F = \frac{1}{t_1 + t_2} = \frac{1}{t_2 \left(1 + \frac{t_1}{t_2}\right)} = \frac{1}{t_2 \left(1 + \frac{V_s}{mV_e}\right)}$ avec $t_2 = \frac{m \cdot L_1 \cdot I_{1\max}}{V_s}$, on obtient :

$$F = \frac{V_s}{m \cdot L_1 I_{1\max} \left(1 + \frac{V_s}{mV_e}\right)} \quad (9.50)$$

La démagnétisation étant complète, l'énergie emmagasinée dans l'inductance pendant t_1 est restituée complètement à la charge pendant t_2 . La puissance transmise à la charge vaut donc :

$$P = \frac{V_s^2}{R} = W_{EM} \cdot F = \left(\frac{1}{2} L_1 I_{1\max}^2 \right) \cdot F \quad (9.51)$$

soit $F = \frac{2V_s^2}{R \cdot L_1 \cdot I_{1\max}^2}$. A partir de ces deux relation, on aboutit à :

$$F = \frac{R}{2 \cdot m^2 \cdot L_1 \left(1 + \frac{V_s}{mV_e}\right)^2} \quad (9.52)$$

- La fréquence de fonctionnement est proportionnelle à la charge si la tension de sortie est constante (si la régulation de tension est bonne !).
- Le fonctionnement à vide est impossible $R = \infty$ correspond à $F = \infty$.
- Par contre le court-circuit, $R = 0$, est envisageable. Il conduit a une fréquence de fonctionnement très basse en pratique.
- Le transistor est fermé avec un courant nul et une dérivé de courant limité par L_1 .
- La diode de sortie commute à faible gradient de courant $\frac{di}{dt} = \frac{V_s}{m^2 \cdot L_1}$.
- Le circuit magnétique présente un dimensionnement plus faible car L_1 est plus faible.
- Le facteur de dimensionnement F_d du transistor est doublé par rapport au mode continu :

$$F_d = \frac{2}{\alpha \cdot (1 - \alpha)} \quad (9.53)$$

mais présente toujours un minimum pour $\alpha = 0,5$ ($F_d \text{ mini} = 8$).

9.8.2 Modélisation en mode auto-oscillant

[LIVRE122] J.-P. FERRIEUX, F. FOREST, 3e édition, 1999, Chapitre , §2.2, page 285-287

L'expression de la valeur moyenne du courant secondaire $i_2(t)$ vaut $I_{2\text{moy}} = \frac{I_{1M}}{2} \frac{n_1}{n_2} \frac{T_2}{T_1 + T_2}$ avec

$$I_{1M} = \frac{V_e}{L_1} T_1, \text{ soit :}$$

$$I_{2\text{moy}} = \frac{V_e}{2L_1} \frac{n_1}{n_2} \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} = \frac{V_e}{2mL_1} \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} \text{ avec } m = \frac{n_1}{n_2} \quad (9.54)$$

D'autre part, $\frac{n_1}{n_2} \frac{V_e}{L_1} T_1 = \frac{V_s}{L_2} T_2$ et $\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = m^2$ dont on déduit :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{n_2}{n_1} \frac{T_1}{T_2} = \frac{mT_1}{T_2} \quad (9.55)$$

On pose $T_1 + T_2 = T$ et $\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2 = \tilde{t}$ les petites variations de T_1 et T_2 . Par différenciation de $I_{2\text{moy}}$, on obtient la relation suivante :

$$\tilde{i}_2 = \frac{1}{2mL_1} \left(\tilde{v}_e \frac{T_1 T_2}{T} + \tilde{t}_1 \frac{T_2}{T} V_e + \tilde{t}_2 \frac{T_1}{T} V_e - \tilde{t} \frac{T_1 T_2}{T^2} V_e \right) \quad (9.56)$$

Au niveau du filtre de sortie, on peut parallèlement écrire :

$$\tilde{v}_s = \frac{R}{1 + RC_p} \tilde{i}_2 \quad (9.57)$$

A partir de ces deux relations en régime dynamique, on aboutit à :

$$\tilde{i}_2 = \frac{1}{2mL_1} \frac{R}{1+RCp} \left(\tilde{v}_e \frac{T_1 T_2}{T} + \tilde{t}_1 \frac{T_2}{T} V_e + \tilde{t}_2 \frac{T_1}{T} V_e - \tilde{t} \frac{T_1 T_2}{T^2} V_e \right) \quad (9.58)$$

De la même façon, \tilde{t}_1 et \tilde{t}_2 peuvent être obtenu par différenciation de $I_{2\text{moy}}$ et de $\frac{V_s}{V_e}$

$$\tilde{t}_1 = \frac{L_1}{V_e} \tilde{i}_{1M} - \frac{T_1}{V_e} \tilde{v}_e \text{ et } \tilde{t}_2 = \frac{L_1}{V_e} \frac{T_2}{T_1} \tilde{i}_{1M} - \frac{T_2}{V_s} \tilde{v}_s, \text{ équations dont on déduit :}$$

$$\tilde{t} = \frac{L_1}{V_e} \left(1 + \frac{T_2}{T_1} \right) \tilde{i}_{1M} - \frac{T_1}{V_e} \tilde{v}_e - \frac{T_2}{V_s} \tilde{v}_s \quad (9.59)$$

En reportant les expressions de \tilde{t}_1 , \tilde{t}_2 et \tilde{t} dans l'équation (9.58), il vient :

$$\tilde{v}_s \left(1 + \frac{T_1^2 T_2}{T^2} \frac{R}{2mL_1} \frac{V_e}{V_s} + RCp \right) = \frac{R}{2mL_1} \left(\tilde{v}_e \frac{T_1^2 T_2}{T^2} + \tilde{i}_{1M} \frac{T_2}{T} L_1 \right) \quad (9.60)$$

Rappelons qu'en régime permanent, nous avons :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{2mL_1} \frac{T_1 T_2}{T} \text{ soit } \frac{T_1 T_2}{T} = \frac{2m^2 L_1}{R} y \text{ avec } y = \frac{V_s}{mV_e} \quad (9.61)$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{n_2}{n_1} \frac{T_1}{T_2} = \frac{mT_1}{T_2} \text{ soit } \frac{T_1}{T_2} = y \quad (9.62)$$

de ceci on déduit $\frac{T_2}{T} = \frac{1}{1+y}$ et $\frac{T_1^2 T_2}{T^2} = \frac{2m^2 L_1}{R} \frac{y^2}{1+y}$. En reportant dans la relation (9.60), on obtient finalement :

$$\tilde{v}_s \left(1 + \frac{y}{1+y} + RCp \right) = \frac{my^2}{1+y} \tilde{v}_e + \frac{R}{2m(1+y)} \tilde{i}_{1M} \quad (9.63)$$

Nous pouvons maintenant en déduire les fonctions de transfert :

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{v}_e} = \frac{my^2}{2y+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega c}} \quad (9.64)$$

$$\frac{\tilde{v}_s}{\tilde{i}_{1M}} = \frac{R}{2m} \frac{1}{2y+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega c}} \quad (9.65)$$

$$\text{avec } y = \frac{V_s}{V_e} \text{ et } \omega c = \frac{1}{RC} \cdot \frac{2y+1}{y+1}.$$